Ad §5.11: Perfekte Körper

Prop.: Sei R ein Ring und p eine Primzahl mit $p \cdot 1_R = 0_R$. Dann ist $\forall r \geq 0$: $\mathrm{Frob}_{p^r} : R \to R$, $x \mapsto x^{p^r}$ ein Ringhomo.

Beweis: Wegen $\mathrm{Frob}_{p^r} = \underbrace{\mathrm{Frob}_p \circ \ldots \circ \mathrm{Frob}_p}_{r \text{ mal}}$ genügt $r = 1$.

Klar: $\forall x, y \in R$: $(xy)^p = x^p y^p \Rightarrow$ multiplikativ

Klar: $\quad 1_R^p = 1_R \Rightarrow$ unitär

Weiter gilt: $\forall x, y \in R$: $(x+y)^p = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} \cdot x^{p-n} \cdot y^n$.

Also $\forall 0 < n < p$: $p \mid \binom{p}{n} = \frac{p!}{n!(p-n)!} \Rightarrow$ diese Terme verschwinden wegen $p \cdot 1_R = 0_R$. Also ist $(x+y)^p = x^p + y^p$. qed.

Prop.: $p := \mathrm{char}(K) > 0 \Rightarrow K$ perfekt g.d.w. $\mathrm{Frob}_p : K \xrightarrow{\sim} K$.

~~Beweis: "$\Rightarrow$" Sei K perfekt und sei $a \in K$. Sei $f \in K[X]$ ein normierter irreduzibler Faktor von $X^p - a$. Sei $b \in \bar{K}$ eine Nullstelle von f. Dann ist $(X - b)$~~

Beweis: "$\Rightarrow$" Sei K perfekt und sei $a \in K$. Sei $b \in \bar{K}$ eine Lösung der Gleichung $b^p = a$. Dann ist $(X-b)^p \overset{!}{=} X^p - b^p = X^p - a$. Dieses Polynom hat also nur die eine Nullstelle b in $\bar{K}$. Sei $f \in K[X]$ ein normierter irred. Faktor von $X^p - a \in K[X]$. Da K perfekt ist, ist f separabel. Damit ist $f = X - b \Rightarrow b \in K$. Also folgt $a = \mathrm{Frob}_p(b)$, somit ist Frob_p surjektiv $\Rightarrow$ bijektiv.

"$\Leftarrow$" Sei $\mathrm{Frob}_p : K \to K$ bijektiv. Sei $f \in K[X]$ irred. aber nicht separabel. Dann ist $f(X) = g(X^p)$ für ein $g(X) \in K[X]$. Schreibe $g(X) = \sum_i a_i X^i$. Nach Voraussetzung ist $\forall i$: $a_i = b_i^p$ für ein $b_i \in K$. Mit $h(X) := \sum_i b_i X^i \in K[X]$ folgt dann

$$h(X)^p = \left(\sum b_i X^i\right)^p \overset{!}{=} \sum b_i^p X^{pi} = g(X^p) = f(X)$$

im Widerspruch zur Irreduzibilität von f in $K[X]$. qed.